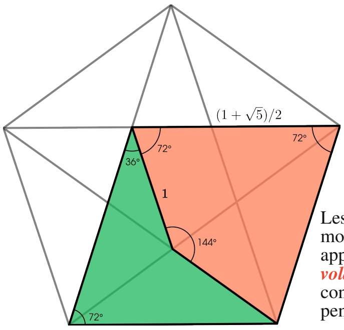
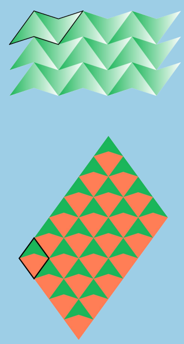
# Pavages quasi-périodiques de Penrose

## Fléchettes, cerfs-volants et quasi-cristaux

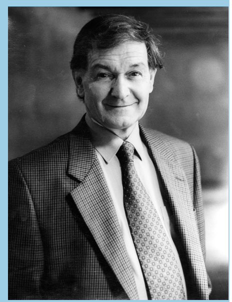



Les deux pavés de base du modèle présenté ici sont appelés ***fléchette*** et ***cerf-volant***, et peuvent être construits à l'intérieur d'un pentagone régulier.

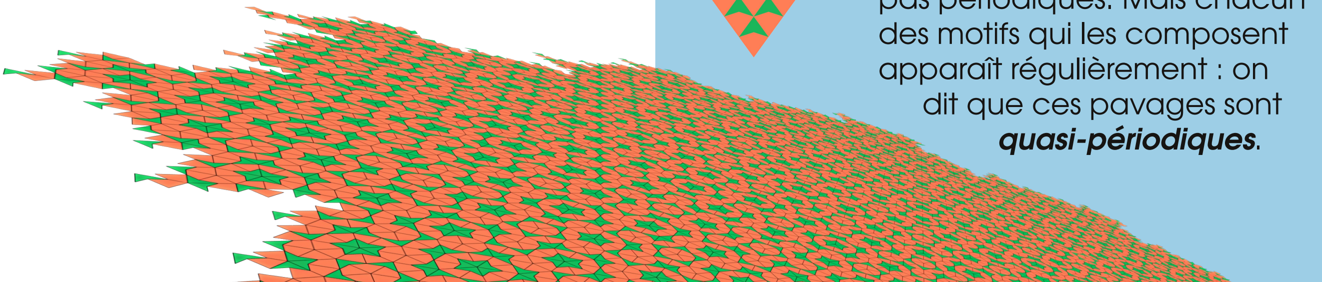


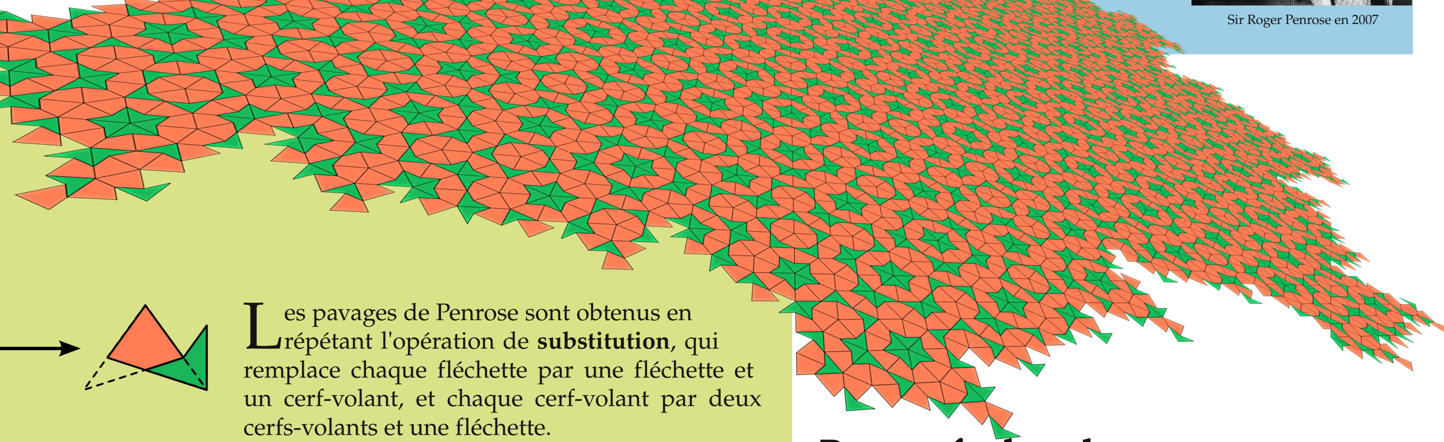
Un pavage du plan est **périodique** s'il peut être construit en répétant à l'infini un seul et même motif. Par exemple, on peut toujours paver le plan de façon périodique avec un quadrilatère.

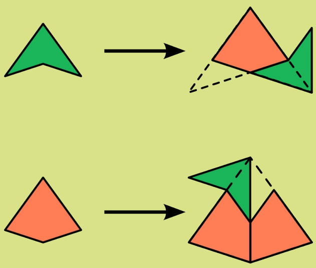
Le mathématicien et physicien Roger Penrose a découvert dans les années 1970 des pavages du plan qui ne sont pas périodiques. Mais chacun des motifs qui les composent apparaît régulièrement : on dit que ces pavages sont ***quasi-périodiques***.



Sir Roger Penrose en 2007

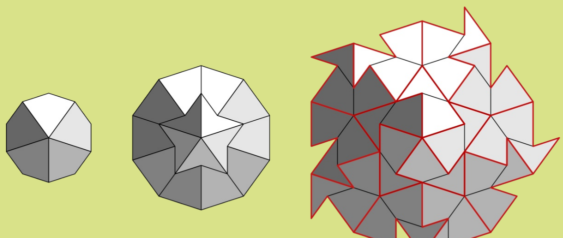






Les pavages de Penrose sont obtenus en répétant l'opération de **substitution**, qui remplace chaque fléchette par une fléchette et un cerf-volant, et chaque cerf-volant par deux cerfs-volants et une fléchette.

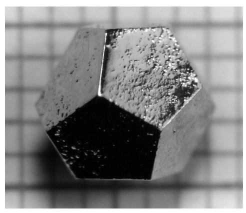
Ci-dessous sont représentées les deux premières étapes de substitution en partant du décagone formé par cinq cerfs-volants.



## Des pavés dans la mare

Les pavages de Penrose furent essentiels pour la découverte et la compréhension des **quasi-cristaux** par Daniel Shechtman en 1982. Ce chimiste observa un cristal dans lequel «les atomes étaient assemblés dans un modèle qui ne pouvait pas être répété», bousculant la conviction des scientifiques de l'époque selon laquelle l'arrangement des atomes dans un cristal était nécessairement périodique.

Cette découverte valut à Shechtman le prix Nobel de chimie 2011.



Un quasi-cristal dodécaédral, formé de Holmium, Magnésium et Zinc

Le **nombre d'or** est omniprésent dans les pavages de Penrose : il apparaît dans les dimensions des pavés de base et dans le facteur d'échelle utilisé lors de la substitution.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339\ldots$$

Le rapport entre le nombre de cerfs-volants et le nombre de fléchettes dans une région de plus en plus grande se rapproche de plus en plus du nombre d'or. Le fait que cette proportion tende vers un nombre **irrationnel** constitue la clé pour prouver qu'un tel pavage n'est pas périodique.

### Références


Roger Penrose, *Role of aesthetics in pure and applied research*, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications 10 (1974).

Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers: And the Return of Dr. Matrix*, The Mathematical Association of America, 1997.

Aurélien Alvarez, *Fléchettes et cerfs-volants dans le ciel mathématique*, Images des Mathématiques, CNRS, 2010. http://images.math.cnrs.fr/Flechettes-et-cerfs-volants-dans.html



Contact : maths_pour_tous@univ-rouen.fr