Pourquoi les bulles sont-elles rondes ?

Les problèmes isopérimétriques : comment obtenir un maximum en économisant sur les bords

Blowing bubbles. Huile sur toile de Charles Chaplin, 1881.

Didon, Carthage et la peau de bœuf

Selon la légende, la princesse Didon fonda la ville de Carthage en 814 av. J.C. Le roi de Numidie lui avait accordé « autant de terre qu'elle pourrait en faire tenir dans la peau d'un bœuf ».

Didon fit découper la peau en bandes très fines qu'elle mit bout à bout afin d'en faire une longue lanière. Puis elle fit étendre cette lanière sur un demi cercle dont les deux extrémités touchaient la côte. Didon avait trouvé la solution au problème isopérimétrique dans un demi plan !

Didon faisant couper la peau d'un bœuf en fines lanières pour entourer un domaine le plus grand possible. Gravure de Matthäus Merian, 1630.

Inégalité isopérimétrique dans le plan

Quelle est la plus grande surface plane que l'on peut délimiter par une corde de longueur donnée ?

Ce problème intéresse les mathématiciens depuis l'Antiquité, et les grecs anciens avaient déjà deviné la réponse : la forme optimale est le cercle. Pourtant, il fallut attendre le XIXe siècle pour trouver la première démonstration de ce résultat.

$S = \frac{L^2}{16} = 0{,}0625\,L^2$

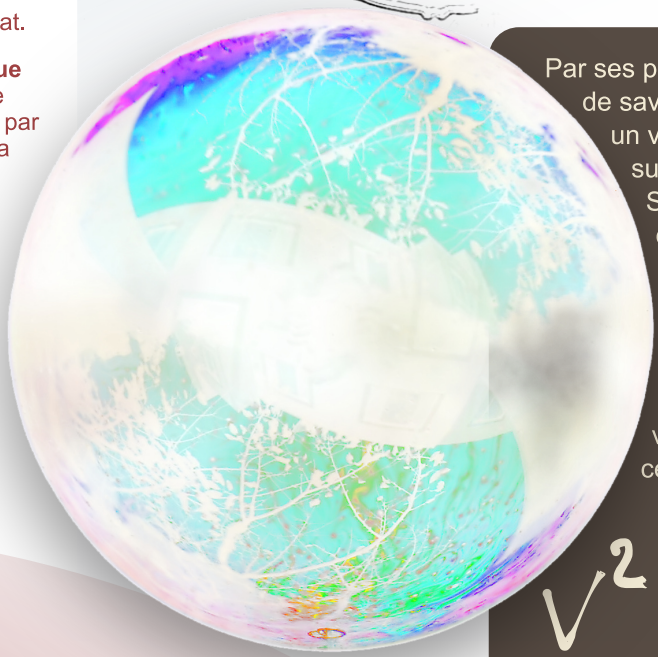
$S = \frac{\sqrt{3}}{24} L^2 \approx 0{,}0722\,L^2$

$S = \frac{L^2}{4\pi} \approx 0{,}07962\,L^2$

L'inégalité isopérimétrique dit précisément que, quelle que soit la forme délimitée par une corde de longueur L, la surface S entourée vérifie toujours

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

Et c'est une égalité seulement dans le cas du cercle !



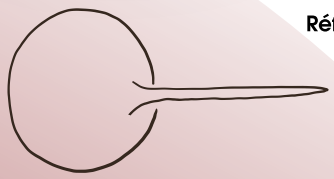
Par ses propriétés physiques, la bulle de savon cherche à envelopper un volume d'air donné dans la surface la plus petite possible. Sa forme donne la solution du problème isopérimétrique en dimension 3 : la sphère. Toute autre surface de même aire que la sphère délimite un volume plus petit que celle-ci.

$$V^2 \leq \frac{S^3}{36\pi}$$

Les objets presque optimaux sont-ils presque ronds ?

Dans le plan, une figure pour laquelle l'inégalité isomérimétrique est presque une égalité est forcément très proche d'un cercle. Dans l'espace, c'est moins évident, comme le suggère cette sphère à laquelle on a rajouté un nez long et fin : la surface et le volume sont très proches de ceux de la sphère, pourtant l'objet ne semble vraiment plus rond !

On peut démontrer toutefois qu'un objet de l'espace qui vérifie presque l'égalité $V^2=S^3/(36\pi)$ ne diffère d'une sphère que d'une partie de volume très petit.



Références

L'inégalité isopérimétrique, Benoît Kloeckner, Images des Mathématiques.

Le problème isopérimétrique, Rozenn Texier-Picard, Les 5 minutes Lebesgue.

LMRS Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

cnrs

contact : SorciersDeSalem@univ-rouen.fr