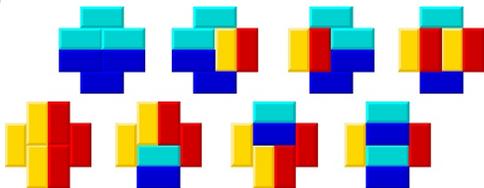
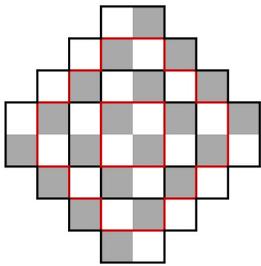


# Le phénomène du cercle arctique

## Quand le hasard joue aux dominos...

**C**OMMENT paver entièrement, sans déborder, avec des dominos de taille  $2 \times 1$ , la région appelée **diamant aztèque** dessinée ci-contre ? Il s'agit ici d'un diamant de taille 4, c'est-à-dire constitué de 4 couches emboîtées.

Pour un diamant de taille 2, il est aisé d'énumérer toutes les possibilités : il en existe 8, représentées ci-dessous.



La couleur sert à distinguer les 4 façons de placer un domino sur un damier (selon la disposition des cases noire et blanche recouvertes).

Le nombre de pavages possibles augmente extrêmement vite avec la taille du diamant. Pour le diamant de taille 4, on peut trouver 1024 pavages différents.

En général, on sait montrer qu'il y a exactement  $2^{n(n+1)/2}$  manières de paver un diamant de taille  $n$ .

**S**I L'ON TIRE au hasard un des pavages possibles d'un diamant de taille assez grande (ici, un diamant de taille 100), on verra apparaître avec une probabilité proche de 1 le fameux cercle arctique : à l'extérieur du cercle inscrit, dans chaque coin du carré les dominos sont tous gelés dans le même sens alors qu'à l'intérieur du cercle le désordre règne.

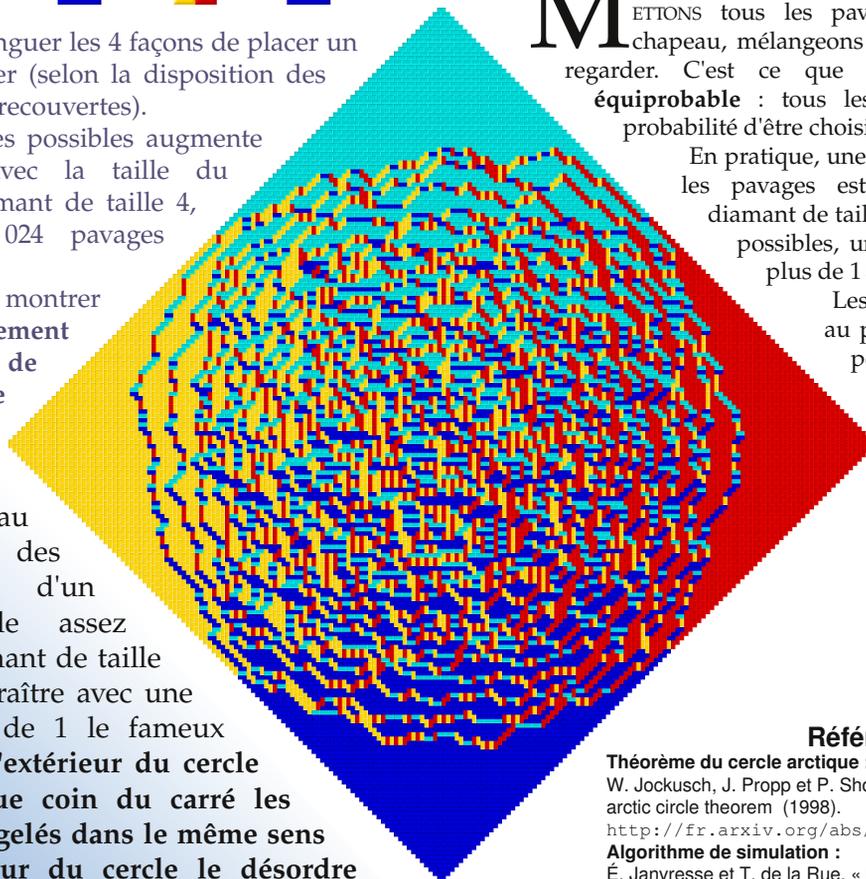


Tirer un pavage au hasard ?

**M**ETTONS tous les pavages possibles dans un chapeau, mélangeons bien et tirons-en un sans regarder. C'est ce que l'on appelle un **tirage équiprobable** : tous les pavages ont la même probabilité d'être choisis.

En pratique, une telle énumération de tous les pavages est irréalisable : pour le diamant de taille 100, il y a  $2^{5050}$  pavages possibles, un nombre qui s'écrit avec plus de 1 500 chiffres !

Les mathématiciens ont mis au point des algorithmes qui permettent de réaliser une telle expérience sans recourir à un chapeau.



### Références

#### Théorème du cercle arctique :

W. Jockusch, J. Propp et P. Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem (1998).

<http://fr.arxiv.org/abs/math.CO/9801068>

#### Algorithme de simulation :

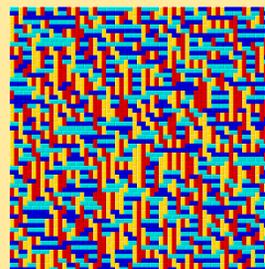
É. Janvresse et T. de la Rue. « Pavages aléatoires par touillage de dominos » — Images des Mathématiques, CNRS, 2009.

<http://images.math.cnrs.fr/Pavages-aleatoires-par-touillage.html>

### Un problème issu de la physique

**L**A PHYSIQUE STATISTIQUE s'intéresse à l'étude à grande échelle de systèmes formés d'une multitude de composantes microscopiques. Ce type de pavage aléatoire a été introduit par les physiciens pour modéliser l'organisation de molécules composées de deux atomes qui se fixent sur une surface.

Le phénomène du cercle arctique dans le pavage aléatoire du diamant aztèque présente un intérêt très particulier : dans ce modèle, les effets de bord se propagent à une grande distance de la frontière du domaine et sont donc visibles à l'échelle macroscopique.



Le phénomène du cercle arctique est propre au diamant aztèque : un pavage typique du carré ne contient pas de zone gelée.