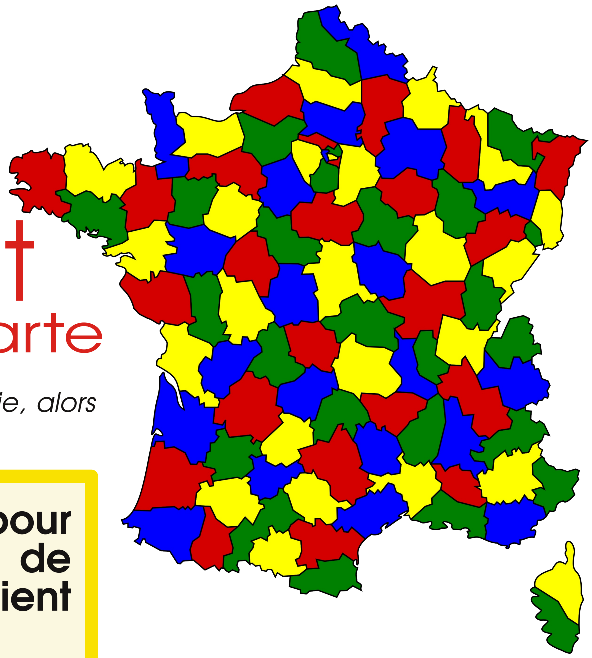
4 couleurs suffisent

Problème de coloriage de carte



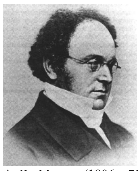
L'histoire commence en 1852, en Angleterre, lorsque Francis Guthrie, alors étudiant, observe le phénomène suivant :

F. Guthrie (1831 – 1899)

Il suffit de quatre couleurs pour colorier n'importe quelle carte de sorte que deux régions voisines soient toujours de couleurs différentes.

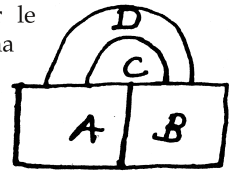
*Même si l'énoncé est simple, il faudra plus d'un siècle pour parvenir à le démontrer et ainsi établir le **Théorème des quatre couleurs**.*

Quatre couleurs au moins



A. De Morgan (1806 – 71)

De Morgan, professeur de Guthrie, fut le premier à étudier le problème. Il dessina tout d'abord la carte montrant que quatre couleurs au moins sont nécessaires.



Prenant conscience de la difficulté du problème, il le diffusa au sein de la communauté mathématique.

L'erreur de Kempe

A. Kempe (1849 – 1922)

Dès lors, de nombreux mathématiciens se penchèrent sur sa résolution et en 1879, Alfred Kempe fut le premier à en publier une démonstration.

Malheureusement, 11 ans plus tard, Percy Heawood décela une erreur qui obligea à rejeter cette preuve. Néanmoins, ses idées, en lien avec la théorie des graphes et basées entre autres sur la formule d'Euler et le Théorème des cinq voisins, subsisteront.

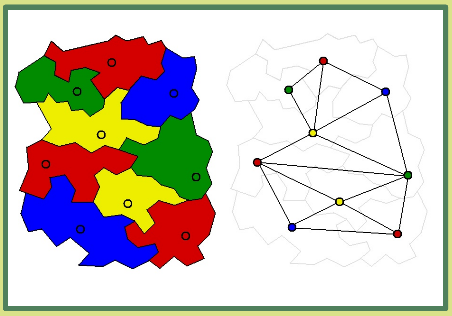
Une preuve par ordinateur

K. Appel (1932 –)
W. Haken (1928 –)

Les nombreux travaux effectués au cours du XX^{e} siècle ont révélé que pour parvenir à une preuve irréfutable il fallait étudier des milliers de configurations. Il faudra donc attendre un siècle pour que Kenneth Appel et Wolfgang Haken, en 1976, établissent la première preuve du **Théorème des quatre couleurs**. Il aura fallu 1200 heures de calculs pour effectuer la première démonstration mathématique nécessitant l'usage d'un ordinateur. La question reste ouverte quant à l'existence d'une preuve sans machine.

Liens avec la Théorie des graphes

Un graphe est un ensemble de sommets reliés ou non par des arêtes. On peut représenter une carte par un graphe, dit planaire, en reliant par une arête deux régions (sommets) limitrophes.



Les faces d'un graphe sont les parties délimitées par les arêtes. Tout graphe planaire vérifie l'égalité suivante :

Formule d'Euler (1750)

$$S - A + F = 2$$

S=nombre de sommets, A=nombre d'arêtes, F=nombre de faces (extérieure comprise)

Cette formule permet d'établir le résultat fondamental suivant :

Théorème des cinq voisins

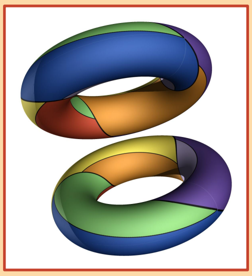
Tout graphe planaire admet un sommet ayant au plus cinq voisins (deux sommets sont voisins s'ils sont reliés par une arête).

Il permet déjà de montrer facilement le Théorème des cinq couleurs et amorce la difficile preuve du **Théorème des quatre couleurs**.

Et sur d'autres surfaces ?

Lorsque la carte est représentée sur une sphère, le **Théorème des quatre couleurs** reste valable.

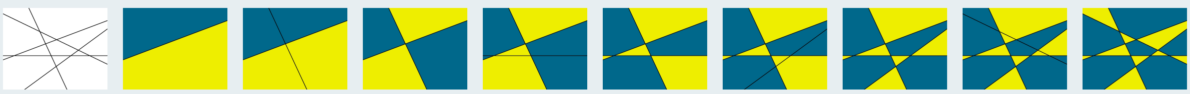
Néanmoins, ce n'est pas le cas pour toutes les surfaces. Sur le tore (une bouée), certaines cartes nécessitent sept couleurs.



Théorème des deux couleurs

Pour les cartes dont les régions sont délimitées par des droites, il suffit de 2 couleurs.

En effet, pour colorier une telle carte, il suffit d'ajouter les droites une par une. À chaque nouvelle droite, le coloriage devient incorrect. On le rectifie alors en inversant les couleurs d'un côté de la droite.



Références :

- **R. Wilson**, *Four colours suffice*, Penguin Books, 2002.
- **F. Casiro, G. Cohen, B. Rittaud**, *Le théorème des quatre couleurs*, Tangente, HS n°12.

LMRS Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UNIVERSITÉ DE ROUEN
cnrs

Contact : maths_pour_tous@univ-rouen.fr