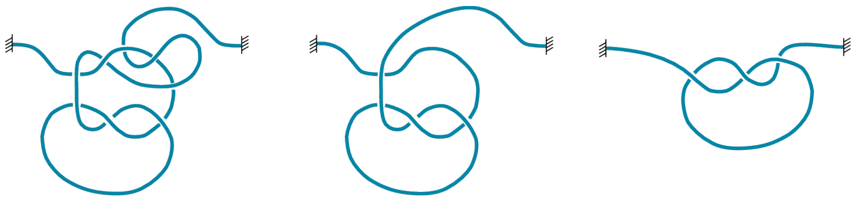
Ce nœud peut-il être dénoué ?

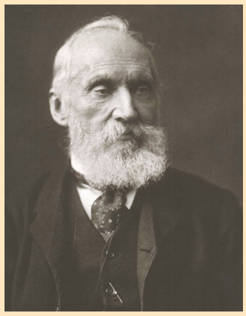
Introduction aux ficelles de la topologie

L'étude mathématique de la théorie des nœuds s'effectue dans le cadre de la **topologie** : la branche des mathématiques qui étudie les propriétés géométriques des objets préservées par les déformations continues.
Ainsi, deux nœuds sont **(topologiquement) équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par des déplacements, étirements ou rétrécissements de la ficelle. Il est interdit en revanche de couper la ficelle, ou de la faire passer à travers elle-même !



Ci-dessus trois nœuds équivalents.

Les nœuds mathématiques sont supposés avoir leurs deux extrémités fixes... Sinon tous pourraient être dénoués avec un peu de patience ! En soudant ensemble les deux extrémités, on obtient une représentation équivalente.
Une ficelle sans aucun croisement réalise un «nœud» particulier, appelé nœud trivial.



Lord Kelvin (1824-1907)

Des nœuds dans l'éther aux enroulements de l'ADN

Au XIXe siècle, les premiers essais de classification des nœuds furent motivés par l'hypothèse de Lord Kelvin, selon laquelle les atomes auraient été des «nœuds dans l'éther». Aujourd'hui, la théorie des nœuds intéresse notamment les biochimistes pour l'étude des enroulements des anneaux d'ADN.

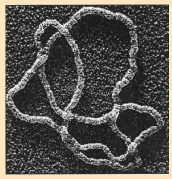
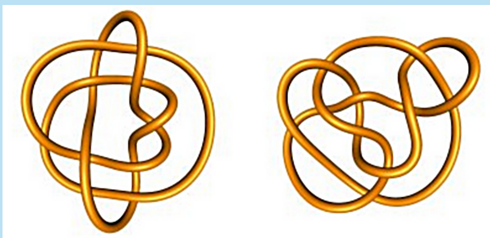


Image tirée de Sumners, D. 1995. Lifting the curtain: Using topology to probe the hidden action of enzymes. Notices of the AMS 42:528-537.

Comment savoir si un nœud donné est équivalent au nœud trivial ? Plus généralement, comment déterminer si deux nœuds donnés sont équivalents ? À ce jour, on ne connaît que des réponses partielles et/ou peu efficaces à ces questions.

La paire de Perko



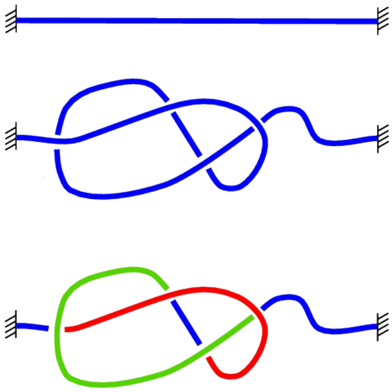
Prouver que deux nœuds sont équivalents se fait naturellement en donnant une suite de déformations qui permettent de passer de l'un à l'autre.
Mais cela n'est pas forcément facile... On pensait les deux nœuds ci-dessus différents depuis au moins soixante-quinze ans quand, en 1974, un avocat new-yorkais nommé Kenneth Perko parvint à montrer qu'ils étaient en fait équivalents !

Références

Nœuds : genèse d'une théorie mathématique
Alexei Sossinski, Edition du seuil, Paris 1999.

La science des nœuds
Pour la Science, Dossier Hors-Série, avril 1997.

Nœuds et tresses
Michael Eisermann
http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/



Des nœuds tricolores

Comment prouver l'impossibilité de passer d'un nœud à un autre ? On utilise pour cela des **invariants**, dont voici un exemple simple.
Colorions les arcs du diagramme d'un nœud en trois couleurs (bleu, rouge ou vert), en respectant les contraintes suivantes :

- l'arc de l'extrémité gauche est bleu,
- à chaque croisement se rencontrent soit trois couleurs, soit une seule, mais jamais deux.

Le résultat est appelé un **tricoloriage**. Il y a toujours au moins un tricoloriage possible, tout bleu.
On peut démontrer que les nœuds équivalents ont le même nombre de tricoloriages possibles : ce nombre est donc un invariant du nœud.
Il est évident que le nœud trivial (ci-contre, en haut) n'admet qu'un seul tricoloriage. Le second nœud, qui lui est équivalent, n'a donc lui aussi qu'un seul tricoloriage possible (vérifiez-le !). Le troisième ne leur est pas équivalent, puisqu'on a trouvé un autre tricoloriage (il en admet trois au total).

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

Contact : maths_pour_tous@univ-rouen.fr