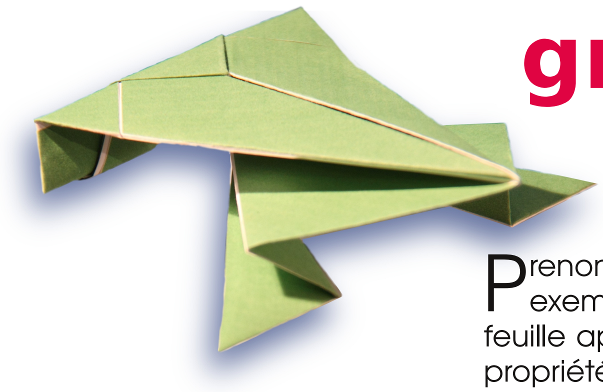
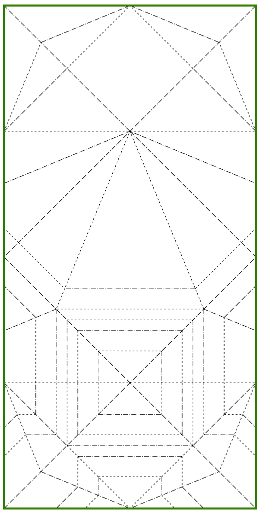
Le théorème de la grenouille bicolore



Un peu de maths autour de l'origami...

Prenons un origami qui, une fois plié, puisse être aplati. Par exemple le pliage de la grenouille convient. Déplions-le : sur la feuille apparaît un réseau de plis, sur lequel on peut démontrer des propriétés mathématiques.



Deux couleurs suffisent

Les plis délimitent des régions, que l'on veut colorier de sorte que deux régions voisines (*i.e.* qui sont bordées par un pli commun) soient toujours de couleurs différentes.

En général, pour colorier une telle carte on a besoin de quatre couleurs. Mais dans le cas de l'origami déplié, deux couleurs suffisent toujours !

Les plis vont par deux

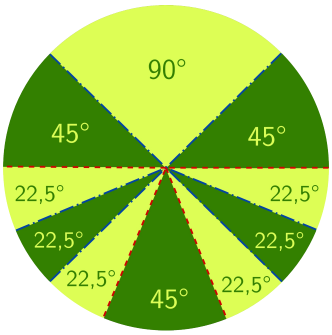
Un sommet est un point où se rencontrent plusieurs plis. Quand il n'est pas sur le bord de la figure dépliée, il est toujours le point de rencontre d'un nombre pair de plis.

En fait, cette propriété est équivalente à la possibilité de colorier en deux couleurs.

Clé de la preuve
On peut colorier chaque région en fonction de son orientation (vers le haut ou vers le bas) dans l'origami plié et aplati.

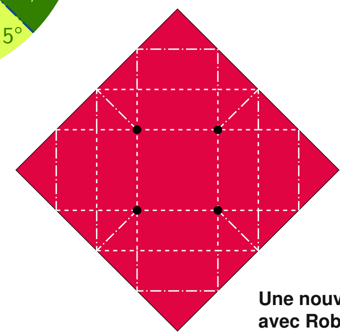
Autant de chaque couleur : le théorème de Kawasaki

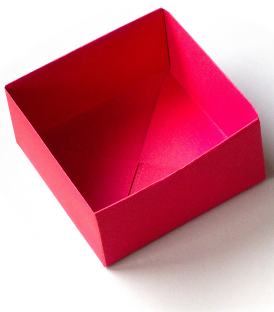
En faisant le tour d'un sommet intérieur de la figure dépliée, la somme des angles de chacune des couleurs vaut 180°.



Montagnes et vallées : le théorème de Maekawa

La différence entre les nombres de plis montagne et de plis vallée qui se rencontrent en un sommet intérieur vaut toujours 2.





Un contre-exemple en boîte

Le théorème des deux couleurs n'est pas vrai pour tous les origamis : pour la boîte, qui ne peut pas être aplatie, la figure dépliée ne peut pas être coloriée en deux couleurs. En effet il existe plusieurs sommets où se rencontrent un nombre impair de plis.

Références

Une nouvelle manière de faire des origamis avec Robert Lang
http://www.ted.com/talks/lang/fre_fr/robert_lang_folds_way_new_origami.html

Mathematics of paper folding, Wikipedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_paper_folding

On the Mathematics of Flat Origamis.
Thomas Hull, *Congressus Numerantium*, Vol 100 (1994), pp. 215-224.

LMRS Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UNIVERSITÉ DE ROUEN
CNRS dépasser les frontières

Contact : maths_pour_tous@univ-rouen.fr